Серия 1. 11-12.01.12.

1. В графе степень каждой вершины не менее k.

а) Докажите, что в этом графе существует несамопересекающийся путь длины хотя бы k (то есть, не менее, чем из $k+1$ вершины).

б) Докажите, что в этом графе существует несамопересекающийся цикл из не мене длины хотя бы k (то есть, не менее, чем из k вершин).

2. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.

а) В графе степень каждой вершины не более k. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в $k+1$ цвет.

б) а) В связном графе степень каждой вершины не более k и есть вершина степени менее k. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов.

3. *Хроматическое число* графа $\chi(G)$ — это наименьшее натуральное k такое, что существует правильная раскраска вершин этого графа в k цветов.

Обозначим через $\alpha(G)$ размер наибольшего *независимого* множества вершин графа G (то есть, такого множества вершин, между которыми нет ни одного ребра.)

Докажите, что для любого графа G выполняется неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G)$.

4. Найдите количество правильных раскрасок вершин дерева (на n вершинах) в k цветов.

5. В ориентированном графе G из каждой вершины выходит не более d стрелок (про количество входящих стрелок ничего не известно). Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом покрасить в $2d+1$ цвет.

6. Пусть d — наибольшая степень вершины графа G. Докажите, что вершины графа G можно покрасить в d^2+1 цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

7. Между волейбольными командами двух стран был проведен матч-турнир, в котором каждая команда сыграла ровно по одному разу со всеми командами другой страны. При этом каждая команда выиграла хотя бы одну встречу. Докажите, что найдутся четыре команды A, B, C и D такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у D, а D выиграла у A. (Ничьих в волейболе не бывает).