Серия 1. 11-12.01.12.

Напомним, что граф называется k-*связным*, если в нем не менее $k+1$ вершины, он связен и остается связным при удалении любых $k-1$ вершин.

1. а) Докажите, что в k-связном графе G существует цикл длины хотя бы k.

б) Докажите, что в k-связном графе G существует цикл длины хотя бы $2k$, если, конечно, в графе не менее $2k$ вершин.

2. В двусвязном графе n вершин, $1 \le k \le n$. Докажите, что этот граф можно разбить на два связных графа из k и $n-k$ вершин.

3. В графе G выбраны множества вершин S_1, S_2, S_3 по 100 вершин в каждом. Известно, что при удалении всех вершин любого из этих трех множеств (и всех выходящих из них ребер) остальные вершины графа распадаются ровно на две компоненты связности, а при удалении любых 99 вершин граф остается связным. Докажите, что все не входящие в множества S_1, S_2 и S_3 вершины графа G можно разбить не более, чем на 6 групп таким образом, чтобы вершины одной группы оказывались в одной компоненте связности при удалении из графа вершин любого из множеств S_1, S_2 или S_3.

4. Докажите, что в двусвязном графе с хотя бы четырьмя вершинами существует ребро, при стягивании которого получается двусвязный граф. *Стягивание ребра xy* — операция, при которой два его конца заменяются на одну вершину, смежную со всеми вершинами графа, с которыми была смежна хотя бы одна из вершин x и y.

5. В многограннике есть ровно две вершины, из которых выходит нечетное число ребер; эти вершины соединены ребром. Докажите, что для каждого $n \ge 3$ у этого многогранника найдется грань, число сторон которой не делится на n.

6. Назовем p^n-деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n-1)$-го уровня ведут p ребер к вершинам n-го уровня, которые являются висячими.

Висячие вершины 4^n-дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n-поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.

7. Степени всех вершин дерева не больше трех. Назовем *расстоянием* между двумя вершинами количество ребер в минимальном соединяющем их пути. Докажите, что вершины этого дерева можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы любые две вершины, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга были покрашены в разные цвета.

8. Назовем ребро графа *важным*, если при его удалении увеличивается размер максимального пустого подграфа. Докажите, что если два важных ребра имеют общую вершину, то в графе есть нечетный цикл.