Гробарий. 9 класс.

Определение 1. 1) Через $\Delta(G)$ мы обозначим максимальную и минимальную степени вершин графа G.

2) Правильная раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины, v степень которой больше 1, не все смежные с v вершины покрашены в один цвет.

6. б) Пусть $\Delta(G) = d \geq 4$. Докажите, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа G в $d+1$ цвет.

20. (P. G. Tait, 1880.) Докажите, что следующие два утверждения равносильны.

1° Для любого плоского графа G без петель выполняется $\chi(G) \leq 4$.

2° Для любой триангуляции T её рёбра можно покрасить в три цвета так, чтобы все рёбра каждой грани были разноцветными. (Такая раскраска рёбер называется *Тэйтовой раскраской.*)

30. г) Даны полоска 1×1000 и n фишек. Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом может взять не более 17 фишек (как из кучи, так и с клеток полоски) и поставить их на любые свободные клетки. Второй своим ходом может снять любое количество стоящих подряд фишек, и положить их обратно в кучу. Первый игрок выигрывает, если поставит все n фишек в ряд без пробелов. Докажите, что если $n > 98$, то второй игрок сможет выиграть.

38. Дано множество M из нескольких вершин. Каждой вершине $a \in M$ соответствует разбиение M_a остальных вершин на несколько групп (возможно, одну). Будем говорить, что вершина a разделяет b и c, если эти две вершины лежат в разных группах из M_a. Известно, что если вершина a разделяет b и c, то b не разделяет a и c.

Соединим ребром любые две вершины, которые не разделяет никакая третья вершина. Докажите, что полученный граф связен.

39. б) В связном графе $2n$ вершин, степень каждой вершины равна трем. Докажите, что количество способов раскрасить ребра этого графа в три цвета правильным образом не превосходит $3 \cdot 2^n$.

Гробарий. 9 класс.

Определение 2. 1) Через $\Delta(G)$ мы обозначим максимальную и минимальную степени вершин графа G.

2) Правильная раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины, v степень которой больше 1, не все смежные с v вершины покрашены в один цвет.

6. б) Пусть $\Delta(G) = d \geq 4$. Докажите, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа G в $d+1$ цвет.

20. (P. G. Tait, 1880.) Докажите, что следующие два утверждения равносильны.

1° Для любого плоского графа G без петель выполняется $\chi(G) \leq 4$.

2° Для любой триангуляции T её рёбра можно покрасить в три цвета так, чтобы все рёбра каждой грани были разноцветными. (Такая раскраска рёбер называется *Тэйтовой раскраской.*)

30. г) Даны полоска 1×1000 и n фишек. Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом может взять не более 17 фишек (как из кучи, так и с клеток полоски) и поставить их на любые свободные клетки. Второй своим ходом может снять любое количество стоящих подряд фишек, и положить их обратно в кучу. Первый игрок выигрывает, если поставит все n фишек в ряд без пробелов. Докажите, что если $n > 98$, то второй игрок сможет выиграть.

38. Дано множество M из нескольких вершин. Каждой вершине $a \in M$ соответствует разбиение M_a остальных вершин на несколько групп (возможно, одну). Будем говорить, что вершина a разделяет b и c, если эти две вершины лежат в разных группах из M_a. Известно, что если вершина a разделяет b и c, то b не разделяет a и c.

Соединим ребром любые две вершины, которые не разделяет никакая третья вершина. Докажите, что полученный граф связен.

39. б) В связном графе $2n$ вершин, степень каждой вершины равна трем. Докажите, что количество способов раскрасить ребра этого графа в три цвета правильным образом не превосходит $3 \cdot 2^n$.