7-8 класс.

1. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2+n+1$ при натуральном n?

2. Для простого числа p нашлось такое целое число x, что x^2+x+3 делится на p. Докажите, что найдется целое число y, для которого y^2+y+25 делится на p.

3. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b существует вещественное $c \in (0;1)$ такое, что $|ac+b+\frac{1}{c+1}| > \frac{1}{24}$.

4. В связном графе $3k$ вершин, все они имеют степень 3, причем каждая вершина входит ровно в один треугольник. Некоторые ребра графа удалили так, что получилось дерево. Докажите, что у этого дерева не более $k+2$ вершин степени 1.

5. Некоторые города страны Халигалии соединены прямыми авиарейсами так, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Два турагентства утверждают, что у них можно приобрести авиатуры, проходящие по максимально возможному количеству городов и не проходящие по одному городу дважды. Докажите, что какой-то из городов посетят покупатели обоих туров.

6. На единичной окружности покрашены несколько дуг, сумма угловых размеров которых больше $180°$. Докажите, что найдутся две окрашенные точки, которые видны из центра окружности под углом $17°$.

7. В ромбе $ABCD$ $\angle A=\alpha$, точки P и Q внутри треугольников ADB и BCD соответственно таковы, что $\angle PBQ=\angle PDQ=\angle ADB$. Докажите, что из отрезков AP, PQ и QC можно составить треугольник с углом α при одной из вершин.

8. В разностороннем треугольнике ABC провели биссектрису BD. Точки E и F – основания перпендикуляров, опущенных на прямую BD из точек A и C соответственно, а точка M расположена на стороне BC так, что DM перпендикулярно BC. Докажите, что $\angle EMD=\angle DMF$.

9. Докажите, что $(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc$ при $0\leq a\leq b\leq c$.

10. Клетки доски 10×14 раскрашены в шахматном порядке. В некоторых клетках поставили по одной фишке так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоит нечетное число фишек. Докажите, что общее количество фишек на черных клетках таблицы четно.

9-10 класс.

Часть 1.

1. Натуральные числа от 1 до 2001 покрасили в четыре цвета. Докажите, что найдутся девять чисел одного цвета, которые можно расставить в таблице 3×3 так, чтобы все шесть сумм чисел по строкам и по столбцам были равны.

2. При каком наименьшем натуральном n не существует арифметической прогрессии из 1999 членов, ровно n из которых – целые?

3. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше 1,002 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г.

4. В связном графе $3k$ вершин, все они имеют степень 3, причем каждая вершина входит ровно в один треугольник. Некоторые ребра графа удалили так, что получилось дерево. Докажите, что у этого дерева не более $k+2$ вершин степени 1.

5. Внутри правильного треугольника со стороной 2 расположен выпуклый четырехугольник. Докажите, что длина хотя бы одной из сторон этого четырехугольника меньше 1.

6. Город имеет вид квадрата 4×4, разбитого на 16 кварталов со стороной 100 м. Велосипедист едет по улицам, на каждом перекрестке поворачивая на 90°. Какой наименьший путь он должен проехать, чтобы побывать на всех 25 перекрестках?

7. Точка K внутри четырехугольника $ABCD$ такова, что $AK \parallel BC$ и $BK \parallel AD$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{ABO} + S_{ABK} < S_{CDO}$.

8. CH – высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника ABC. На отрезках AH и BH, как на диаметрах, построены окружности, пересекающие катеты в точках M и N. Докажите, что MN – касательная к построенным окружностям.

9. Найдите все целые k, для которых существует непостоянная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такая, что $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f(\text{НОД}(x, y))$ и $f(2001) = 2001$.

10. Дано выражение $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \ldots + x_{1999}x_{2000}x_{2001} + x_{2000}x_{2001}x_1 + x_{2001}x_1x_2$. Петя своим ходом заменяет одну из переменных числом 1, а Вася заменяет одну из переменных числом 0. Игроки одят по очереди, первым ходит Петя. Вася хочет, чтобы полученная после 2001-го хода сумма была отлична от нуля. Сможет ли Петя ему помешать?

Часть 2.

1. Натуральные числа от 1 до 2001 покрасили в четыре цвета. Докажите, что найдутся девять чисел одного цвета, которые можно расставить в таблице 3×3 так, чтобы все шесть сумм чисел по строкам и по столбцам были равны.

2. Дано такое семейство S подмножеств множества $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, что если $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$, $A \cap B \in S$ и если $A \in S$, то $M \setminus A \in S$. Сколько множеств может быть в таком семействе S?

3. AD – биссектриса треугольника ABC. Оказалось, что $AB + AD = CD$ и $AC + AD = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $BC = DC$. Точка I – центр вписанной окружности этого треугольника. Прямая DI вторично пересекается с описанной окружностью треугольника BIC в точке E. Докажите, что $BC = C$.

5. Внутри правильного треугольника со стороной 2 расположен выпуклый четырехугольник. Докажите, что длина хотя бы одной из сторон этого четырехугольника меньше 1.

6. Город имеет вид квадрата 4×4, разбитого на 16 кварталов со стороной 100 м. Велосипедист едет по улицам, на каждом перекрестке поворачивая на 90°. Какой наименьший путь он должен проехать, чтобы побывать на всех 25 перекрестках?

7. В компании из 20 человек для любых троих найдчтся человек, который знает их всех. Докажите, что найдчтся человек, имеющий не менее девяти знакомых.

8. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

9. Найдите все целые k, для которых существует непостоянная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такая, что $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f(\text{НОД}(x, y))$ и $f(2001) = 2001$.

10. Докажите, что последовательность, удовлетворяющая для каждого $n \geq 0$ условиям $a_{2n} = a_n$, $a_{4n+3} = 0$, $a_{4n+1} = 1$, непериодична.

11 класс.

1. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{2}(x+y)(y+z)(x+z)+(x+y+z)^3=1-xyz$.

2. Дано такое семейство S подмножеств множества $M=\{1,2,\ldots,m\}$, что если $A,B\in S$, то $A\cup B\in S$, $A\cap B\in S$ и если $A\in S$, то $M\setminus A\in S$. Сколько множеств может быть в таком семействе S?

3. AD – биссектриса треугольника ABC. Оказалось, что $AB+AD=CD$ и $AC+AD=BC$. Найдите углы треугольника ABC.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона $AC>BC$, а CD, AP и BQ – высоты. Пусть R – точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)\geq 3.$$

6. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1=1$, $x_{n+1}=\frac{x_n}{n}+\frac{n}{x_n}$. Докажите, что $[x_n^2]=n$ при $n\geq 4$.

7. В компании из 20 человек для любых троих найдчтся человек, который знает их всех. Докажите, что найдчтся человек, имеющий не менее девяти знакомых.

8. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a+b+c$.

9. Функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ задана формулой $f(n)=\begin{cases} n+10, n<100 \\ f(f(n-11)), n\geq 100. \end{cases}$ Найдите $f(2002)$.

10. Докажите, что последовательность, удовлетворяющая для каждого $n\geq 0$ условиям $a_{2n}=a_n$, $a_{4n+3}=0$, $a_{4n+1}=1$, непериодична.