6-7 класс.

1. На шахматной доске стоят 20 ладей. Они бьют все клетки поля. Докажите, что можно оставить только 8 из этих ладей, так что все поле останется под боем.

2. За круглым столом сидят 25 детей и 25 преподавателей и грустно смотрят друг на друга.

а) Докажите, что есть ребенок, который сидит точно напротив преподавателя.

б) Докажите, что есть несчастный, оба соседа которого — дети.

3. На клетчатой бумаге закрасили чернилами 239 клеток. Докажите, что есть закрашенная клетка, у которой четное число закрашенных соседних (т.е. имеющих с ней общую сторону) клеток.

4. 10 участников дирихлюпинской городской олимпиады решили всего 35 задач, причем на награждении выяснилось, что были участники, решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Докажите, что кто-то решил не менее 5 задач.

5. 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

6. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. При этом в классе всего 19 парт и 31 хулиган. Сколько в классе учеников?

7. В турнире по крестикам-ноликам за победу дается одно очко, за ничью — ноль очков, а за проигрыш одно очко вычитается. Несколько школьников сыграли турнир по крестикам-ноликам так, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Один из участников набрал семь очков, а другой — 20 очков. Докажите, что в турнире была хоть одна ничья.

8. В некоторой компании каждый джентльмен имеет хотя бы одного знакомого. Докажите, что эту компанию можно разбить на две группы так, чтобы каждый джентльмен был знаком с кем-нибудь из другой группы.

8 класс.

1. а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения ее противоположных сторон лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ из 4 точек: середин сторон AB и CD, точки пересечения диагоналей, а также продолжений сторон BC и AD какие-то 3 лежат на одной прямой, то AB параллельна CD.

2. Точки P и Q — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки AP и AQ делят диагональ BD на 3 равные части. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D таким образом, что $\angle ABD = \angle ACB$. Докажите, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

4. В выпуклом четырехугольнике провели средние линии и раскрасили 4 образовавшихся четырехугольника в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых частей.

5. Точка M – середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что угол AMD – прямой. Чему может быть равен угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$?

6. На стороне AC правильного треугольника AB выбрана точка K. Из нее на стороны AB и BC опущены перпендикуляры KX и KY. Докажите, что прямая KO делит отрезок XY пополам.

7. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону CD точке E, а продолжение стороны BC — в точке F. Докажите, что $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}$.

8. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая диагональ равна какой-то стороне, а каждая сторона — какой-то диагонали?

9-10 класс.

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи DA и CB пересекаются в точке Q, а лучи BA и CD — в точке P. Оказалось, что $\angle AQB = \angle APD$. Биссектрисы углов $\angle AQB$ и $\angle APD$ пересекают стороны четырехугольника в точках X, Y и Z, T соответственно. Описанные окружности треугольников ZQT и XPY пересекаются в точке K внутри четырехугольника. Докажите, что K лежит на диагонали AC.

2. На данном отрезке AB выбирается точка M и на отрезках AM и BM как на гипотенузах строятся равнобедренные прямоугольные треугольники AMP и BMQ, лежащие по одну сторону от AB. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Точка P лежит на отрезке MN, причём $MP = CN$ и $NP = AM$. Точка O – центр описанной окружности четырехугольника. Докажите, что, если точки O и P не совпадают, то $OP \perp MN$.

4. Окружности s_1, s_2 и s_3 проходят через точку A. Известно, что радикальная ось s_1 и s_2 проходит через центр s_3, а радикальная ось s_2 и s_3 — через центр s_1. Докажите, что радикальная ось s_1 и s_3 проходит через центр s_2.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Докажите, что если $\angle CC_1B_1 = 30°$, то либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

6. На чевианах AP и BQ треугольника ABC как на диаметрах построили две окружности. Докажите, что их точки пересечения и ортоцентр треугольника лежат на одной прямой.

7. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ обладает свойством, что четырехугольники $ABCD, CDEF, EFAB$ — вписанные. Докажите, что и сам шестиугольник тоже вписанный.

8. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AC иBC в таких точках M и N соответственно, что $MN = AM + BN$. Докажите, что все такие прямые касаются одной и той же окружности.

11 класс.

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте на каждой его стороне по точке таким образом, чтобы периметр треугольника, образованного этими точками был минимальным.

2. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а диагонали — в точке P. Описанные окружности треугольников AKC и BKD пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

3. Продолжение медианы BM треугольника ABC пересекает описанную окружность этого треугольника в точке K. Описанная окружность треугольника MCK пересекает сторону BC в точке P. Описанная окружность треугольника MAK пересекает продолжение стороны BA в точке Q. Докажите, что $PQ > AC$.

4. BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC в котором $\angle A = 45°$, точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр этого треугольника соответственно. Докажите, что отрезок B_1C_1 делит отрезок OH пополам.

5. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$ а I — его точка пересечения биссектрис. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

6. Точка P находится внутри остроугольного треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки, симметричные P относительно сторон треугольника ABC. Оказалось что шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ — описанный. Докажите, что P — точка Торричелли (т. е. точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами).

7. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

8. Окружность с центром O проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников CPB и CQA пересекаются в точке K. Докажите, что угол CKO — прямой.