

Олимпиада ФМЛ № 131. 5 класс.

Результаты и прочая информация на сайте www.kazan-math.info

1. В полдень на детскую площадку пришел Вася, через два часа после него - Маша, а через полтора часа после нее - Никита. Вася играл четыре часа, Маша - три, а Никита - два часа. Как долго Маша и Никита были на площадке вдвоем?

Ответ: 1 час.

Решение. Вася был на площадке с 12:00 до 16:00. Маша с 14:00 до 17:00. Никита с 15:30 до 17:30. Т.е. Маша с Никитой были на площадке вдвоем с 16:00 до 17:00.

Комментарий. Вычисления без комментариев - 6б. Ответ в полтора часа (без учета Васи) - 2б.

2. В девяти клетках квадрата стоят цифры от 1 до 9. Сумма цифр в первой строке равна 10, во второй - 11. Какие цифры стоят в третьей строке?

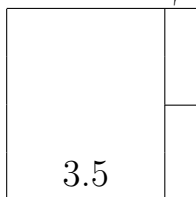
Ответ: 7, 8, 9.

Решение. Заметим, что сумма чисел в первой и второй строках равна $10+11=21$. Наименьшая сумма шести различных чисел от 1 до 9 равна $1+2+3+4+5+6=21$. Это означает, что в первых двух строках стоят именно эти числа. Поэтому в третьей строке стоят числа 7, 8, 9.

Комментарий. Ответ без обоснования - 1б. Отсутствие рассуждений про максимальность - 6б.

3. Дан квадрат со стороной 4 см. Разрежьте его на три прямоугольника, суммарный периметр которых равен 25 см.

Решение. Достигается, например, в таком разрезании.



4. В неверном равенстве $2 \times 3 \times 2 + 3 \times 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 3 + 4 \times 3 \times 2$ расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.

Ответ: $2 \times 3 \times (2 + 3 \times 4) \times 3 = 3 \times 2 \times (3 + 4) \times 3 \times 2$.

5. Как известно, Алексей Сергеевич может пить только три напитка: морс, чай с сахаром и эссенуки. Давным-давно, Алексей выбрал для каждого дня недели какой то определенный напиток и с тех пор по этим дням пьет только его. Оказалось, что если два дня подряд был один и тот же напиток, то на следующий день будет другой, а если два дня подряд были разные напитки, то на следующий день будет один из этих двух. Может ли Алексей Сергеевич пять дней в неделю пить только чай с сахаром?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Заметим, что нет трех дней подряд, когда он пил один и тот же напиток. Без ограничения общности, можно считать, что в понедельник он пил не чай. Тогда со вторника по четверг и с пятницы по воскресенье было еще по одному дню когда он пил не чай. Т.е. было хотя бы три дня когда он пил не чай.

Олимпиада ФМЛ № 131. 6 класс.

Результаты и прочая информация на сайте www.kazan-math.info

1. У мамы есть напольные весы. Мальчики решили узнать свой вес и вот что обнаружили: Гоша вчетверо тяжелее Ромы, а Кеша вчетверо тяжелее Гоши. Два Ромы, четыре Гоши и Кеша весят 200 килограммов. Сколько весит Гоша?

Ответ: $23 \frac{9}{17}$.

Решение. Пусть вес Гоши – x . Тогда вес Ромы – $\frac{x}{4}$, а Кеши – $4x$. Тогда составим уравнение: $\frac{x}{2} + 4x + 4x = 200$. Откуда найдем требуемое.

2. Микрокалькулятор позволяет делать с введённым в него числом две операции: умножать на 2 или переставлять его цифры. Можно ли получить из числа 1 число 68?

В связи с небольшой оплошностью организаторов в этой задаче при разном понимании условия были разные ответы. В итоге было решено, что и первое, и второе решения, приведенные ниже, будут принимать как правильные. В первом решение считается, что мы не можем ставить ноль на первое место, во втором – можно.

Решение. 1. Предположим, что такое сделать можно. Посмотрим, что может стоять перед 68. Это или 34 или 86. Если было 34, то перед ним или 17 или 43. Перед 17 ничего не могло быть так, как оно и само нечетно и 71 нечетно. Если было 43, то перед ним 34, что уже было разобранно. Если перед 68 стояло 86, то перед ним могло быть только 43 или 68. Оба эти случаи также не возможны.

2. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 29 \rightarrow 58 \rightarrow 85 \rightarrow 170 \rightarrow 17 \rightarrow 34 \rightarrow 68$.

3. Два разбойника и два путешественника хотят переправиться через реку на противоположный берег на лодке. Смогут ли они это сделать при выполнении условий:

- лодка выдерживает только двоих;
- один путешественник не может остаться наедине с двумя разбойниками;
- если на противоположной стороне окажутся только два разбойника или только два путешественника, то они просто уйдут;
- один из разбойников однорукий и поэтому грести не может.

Ответ: Смогут.

Решение. Сначала первый путешественник везет однорукого разбойника на тот берег. Оставляя его там, путешественник возвращается. Перевозит второго путешественника и, оставляя его на другом берегу, возвращается к одному разбойнику. Вдвоем они переезжают на другой берег.

4. По целым точкам числовой оси прыгает кузнечик. Он может прыгать на 3 вперед или на 2 назад. Как ему пропрыгать по числам от 1 до 1000 ровно по одному разу?

Решение. Прыгаем так: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6$. В итоге мы заполнили пятерку и пришли на первую позицию следующей. В доказательстве существенно используется делимость 1000 на 5.

5. Как известно, Алексей Сергеевич может пить только три напитка: морс, чай с сахаром и эссендуки. Давным-давно, Алексей выбрал для каждого дня недели какой то определенный напиток и с тех пор по этим дням пьет только его. Оказалось, что если два дня подряд был один и тот же напиток, то на следующий день будет другой,

а если два дня подряд были разные напитки, то на следующий день будет один из этих двух. Всегда ли можно зная напитки двух последовательных дней узнать напитки всей недели?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. Например возможны следующие последовательности напитков: 1223322 и 1223221. Как видно они совпадают по первым двум дням.

Олимпиада ФМЛ № 131. 7 класс.

Результаты и прочая информация на сайте www.kazan-math.info

1. В комнате было сколько-то стульев на четырех ножках и сколько-то табуреток на трех ножках. Когда все уселись, то свободных мест не осталось, а сумма ног сидений и сидящих стала равна 41. Сколько стульев и сколько табуреток было в комнате?

Ответ: Стульев 1, табуреток 7 или стульев 6, табуреток 1.

Решение. Пусть стульев x , а табуреток y . Тогда "ног"у стульев (вместе с ногами сидящих на них) $6x$, а "ног"у табуреток – $5y$. Получаем уравнение: $6x + 5y = 41$. x может быть равно 0,1,2,3,4,5,6 (больше быть не может потому что иначе будет слишком много ног). Подставляя эти значения в полученное уравнение получаем, что подходят только $x = 1$, $x = 6$. Соответственно $y = 7$, $y = 1$

2. На олимпиаду имени Леонарда Эйлера от г.Казани прошли 12 человек. Изначально все хотели ехать, и руководитель команды составил список для покупки билетов на поезд, в котором он был на первом месте, а остальные дети в каком-то произвольном порядке. За несколько дней до отъезда руководителю позвонили каждый первый человек и изменили свое желание участвовать в олимпиаде. Потом позвонил каждый, чей номер делится на два и изменил свое желание. Потом каждый, чей номер делится на три и т.д. В конце позвонил каждый, чей номер делится на 13 и изменил свое мнение. В итоге Юра решил не ехать. Какой у него был номер по списку, если он был нечетным?

Ответ: 9.

Решение. Легко видеть, что каждый из школьников менял свое мнение столько, сколько делителей у его номера по списку. Раз Юра не поехал он поменял свое мнение нечетное число раз. Нечетное число делителей есть у чисел 1,4,9. Первый Юра не мог быть (он ведь не руководитель), 4 также не мог быть потому, что его номер нечетен. Значит он был девятым.

3. В семье три брата: Гоша, Кеша и Рома. Один из трех братьев всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий - хитрец - иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос: "Кто Кеша?" они ответили:

Гоша: - Лжец.

Кеша: - Я хитрец!

Рома: - Абсолютно честный мальчик.

Можно ли догадаться, кто на самом деле Кеша?

Решение. Кеша не может всегда говорить правду потому что он бы тогда не смог сказать "Я хитрец". Предположим, что Кеша хитрец. Тогда и Гоша, и Рома соврали, но среди них есть человек, который всегда говорит правду. Значит Кеша не хитрец. Значит он лжец.

4. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2, ..., 2000. Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.

Решение. Докажем, что первое число можно уменьшить до 1. Пусть на первой позиции стоит x , заменим его на $x - 1$, будем его так заменять, пока это число не

станет равным 1. Аналогично можно расставить все остальные.

5. Как известно, Алексей Сергеевич может пить только три напитка: морс, чай с сахаром и эссендуки. Давным-давно, Алексей выбрал для каждого дня недели какой то определенный напиток и с тех пор по этим дням пьет только его. Оказалось, что если два дня подряд был один и тот же напиток, то на следующий день будет другой, а если два дня подряд были разные напитки, то на следующий день будет один из этих двух. Мог ли он пить каждый напиток хотя бы два раза в неделю?

Решение. Пусть Алексей пил напиток "3" ровно два дня. Тогда возможны три случая. По количеству дней между ними.

1) 33XXXXX. На третий день, без ограничения общности, был напиток 1.

331XXXX. На четвертый день может быть только 1 или 3. Но все тройки уже использованы.

3311XXX. На пятом месте может быть либо 2 либо 3, но троек больше нет.

33112XX. Заметим, что среди двух оставшихся нет троек, тогда они должны быть равными. Так как нет еще двоек, то это двойки. Тогда есть три двойки подряд. Противоречие.

2) 3X3XXXX. Без ограничения общности можно считать, что на второй день был 1 напиток.

313XXXX. На четвертый день может быть 1 или 3. Но троек больше нет.

3131XXX. На пятый день может быть 1 или 3. Но троек больше нет.

31311XX. Так как нет двоек то оставшиеся два дня - это двойки. Но тогда есть блок 231. Противоречие.

3) 3XX3XXX. Так как перед тройкой в предыдущих двух клетках нет троек, то они должны быть равными. Тогда можно считать их такими:

3113X22. Тогда есть блок 231. Противоречие.