7 класс.

1. Докажите, что если середина стороны AB треугольника ABC равноудалена от сторон AC и BC, то треугольник равнобедренный.

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $|AB| = |CE|$, $|BE| = |AD|$, $\angle AED = \angle BAD$. Докажите, что $|BC| > |AD|$.

3. Докажите, что медиана, проведенная из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $BL = AB$. На продолжении BL за точку L выбрана точка K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BK = BC$.

5. AF — медиана треугольника ABC. D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

6. В выпуклом 5-угольнике все стороны равны, а также равны четыре из пяти диагоналей. Докажите, что все пять диагоналей равны.

7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем треугольник ACD остроугольный, а $\angle B = \angle D + 90°$. Докажите, что $AB + BC < AD + DC$.

8-9 классы.

1. Медианы треугольника делят его на шесть меньших треугольников. Докажите, что эти треугольники равновелики.

2. а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения ее противоположных сторон лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ из 4 точек: середин сторон AB и CD, точки пересечения диагоналей, а также продолжений сторон BC и AD какие-то 3 лежат на одной прямой, то AB параллельна CD.

3. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда диагонали делят его на четыре равновеликие части.

4. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ со стороной 1 выбрали точки M и N таким образом, что $2\angle MCN = \angle DCB$. Докажите, что периметр треугольника AMN не больше 2.

5. Два треугольника ABC и ADE подобны, одинаково ориентированы и лежат внутри угла DAC. Докажите, что треугольники BAD и CAE тоже подобны.

6. На стороне AC правильного треугольника AB выбрана точка K. Из нее на стороны AB и BC опущены перпендикуляры KX и KY. Докажите, что прямая KO делит отрезок XY пополам.

7. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону CD точке E, а продолжение стороны BC — в точке F. Докажите, что $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}$.

10-11 классы.

1. Высоты треугольника AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и N соответственно. M – середина стороны AC. Известно, что $\angle BKM = \angle BNM$. Докажите, что перпендикуляры к сторонам исходного треугольника в точках K, N, M пересекаются в одной точке.

3. Около треугольника ABC описана окружность. Хорды, соединяющие середину дуги AC с серединами дуг AB и BC, пересекают стороны AB и BC в точках K и H соответственно. Докажите, что прямая KH параллельна стороне AC.

4. Продолжение медианы BM треугольника ABC пересекает описанную окружность этого треугольника в точке K. Описанная окружность треугольника MCK пересекает сторону BC в точке P. Описанная окружность треугольника MAK пересекает продолжение стороны BA в точке Q. Докажите, что $PQ > AC$.

5. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Описанная около $A_1B_1C_1$ окружность вторично пересекает стороны треугольника в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что AA_2, BB_2, CC_2 тоже пересекаются в одной точке.

6. AB — наименьшая сторона остроугольного треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки X и Y соответственно. Докажите, что длина ломаной $AXYB$ не меньше удвоенной длины AB

7. В треугольнике из каждой вершины проведены по 2 чевианы таким образом, что все 6 чевиан имеют равные длины. Докажите, что середины этих чевиан лежат на одной окружности.

8. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC тогда и только тогда, когда точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A, лежат на одной прямой с точкой A.