10-11 класс.

1. Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность попарно пересекающихся множеств натуральных чисел, каждое из которых содержит не более 2000 элементов. Докажите, что существует конечное множество B натуральных чисел такое, что пересечение любых двух множеств A_i и A_j, $(i, j \in \mathbb{N})$ содержит хотя бы один элемент множества B.

2. В графе любые два простых цикла нечетной длины не имеют общих ребер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

3. В квадратной таблице $n \times n$ записаны числа так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Укажите наименьшее k такое, что для любой таблицы всегда можно увеличить k чисел так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах стали равными 1.

4. Пусть $Q(x)$ — многочлен ненулевой степени с целыми коэффициентами, который не раскладывается в произведение многочленов ненулевой степени с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдутся такие натуральное число n и простое число p, что число $Q(n)$ делится на p, но не делится на p^2.

5. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех действительных x удовлетворяют уравнению $f(f(x)) = f(x) + 2x$.

6. Сколько существует операций $*$, заданных на множестве $\{1, 2, \ldots, 101\}$ и обладающих следующими свойствами: 1) $a * a = a$; 2) $(a * b) * (c * d) = a * d$?

7. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает продолжение средней линии треугольника, параллельной стороне BC, в точке A'. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Эйлера треугольника.

8. Из каждой вершины (не обязательно выпуклого) многоугольника можно провести диагональ длины, не превосходящей 1, целиком лежащую внутри многоугольника. Докажите, что у этого многоугольника найдется сторона, длина которой не превосходит 1.

9. Точки K и M — середины диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$, а точки L и N — середины сторон BC и AD соответственно. Описанная окружность треугольника KLM вторично пересекает сторону BC в точке L', а описанная окружность треугольника KMN вторично пересекает сторону AD в точке N'. Докажите, что прямая KM делит отрезок $L'N'$ пополам.

10. Сумма положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n \geq 4)$ равна 1. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + \ldots + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

8-9 класс.

1. Петя написал несколько алгебраических выражений, возвел каждое в квадрат и сложил результаты. Могло ли у него в итоге получиться выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$?

2. Параболы $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 + cx + d$ не имеют общих точек. Докажите, что есть прямая, от которой они лежат по разные стороны.

3. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что числа $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ – точные кубы.

4. Петя загадал несколько дробей, а Вася придумал одно произвольное число. Опытная учительница Марья Ивановна заметила, что произведение числа, придуманного Васей, на любое из чисел, придуманных Петей, можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно различных) чисел, придуманных Петей. Докажите, что придуманное Васей число – целое.

5. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

6. Пусть $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассматриваются функции $f : A_n \to A_n$ такие, что $f(k) \leq f(k+1)$ и $f(k) = f(f(k+1))$ для всех k от 1 до $n-1$. Найдите их количество.

7. Найдите все простые p такие, что $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ является полным квадратом.

8. В квадратной таблице $n \times n$ записаны числа так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Укажите наименьшее k такое, что для любой таблицы всегда можно увеличить k чисел так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах стали равными 1.

9. Дана трапеция $ABCD$. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, BCD, CDA и DAB также образуют трапецию.

10. В треугольнике ABC провели биссектрису BD. Известно, что $AB = AC$, $BD + AD = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

7 класс.

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка P, что $AP = AB$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке K. Прямая BP пересекает отрезок CD в точке L. Докажите, что а) $BK > CL$. б) $BK > 2CL$.

2. $2^p + 3^p = a^n$, где a и n — натуральные числа, а p — простое. Докажите, что $n = 1$.

3. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

4. Даны неотрицательные числа x, y и z. Докажите, что наименьшее из чисел $(x-y)^2$, $(y-z)^2$ и $(x-z)^2$ не превосходит $\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$.

5. В каждой клетке доски размером $n \times n$ стоит по числу. Все числа различны. В каждом столбце отметили клетку с самым большим числом. После этого на доску поставили n ладей, не бьющих друг друга, таким образом, что сумма чисел на клетках, где стоят ладьи, максимальна. Докажите, что по крайней мере одна ладья оказалась на отмеченной клетке.

6. Петя написал несколько алгебраических выражений, возвел каждое в квадрат и сложил результаты. Могло ли у него в итоге получиться выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$?

7. Петя загадал несколько дробей, а Вася придумал одно произвольное число. Опытная учительница Марья Ивановна заметила, что произведение числа, придуманного Васей, на любое из чисел, придуманных Петей, можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно различных) чисел, придуманных Петей. Докажите, что придуманное Васей число – целое.

8. Пусть x_n – количество n-значных чисел, в записи которых все цифры не больше 2, и любые две соседние цифры отличаются не более, чем на 1. Докажите, что $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при всех $n > 2$.

9. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k (где $k \geq 2$). Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k + 1$.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.