5 класс. Решения.

1. Сумма 9 различных натуральных чисел равна 46. Найдите эти числа.

Решение. Очевидно, что числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$ подходят так, как их сумма равна 46. Покажем, что других различных чисел с суммой 46 нет. Пусть такой набор существует. Если в нем нет хотя бы одного из чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, то общая сумма всех 10 чисел увеличится (потому что хотя бы одного из этих чисел не будет, а значит будет число большее него, а поэтому сумма всех 10 будет больше 46). Значит в нашем наборе должны быть числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ Тогда девятое из чисел равно 10.

2. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. Аналогично эту операцию проделали еще три раза. В результате на прямой оказалось ровно 65 точек. Сколько точек было первоначально?

Решение 1. Пусть изначально на прямой было 5 точек. Тогда после первого добавления точек стало 9. После второго – 17, после третьего – 33, после четвертого – 65. То есть ответ 5 подходит. Покажем, что других ответов не было. Если есть другой ответ, то изначально точек было либо больше 5, либо меньше 5. Предположим, сначала, что их было больше. Тогда после второго добавления было больше чем 17, после третьего – больше чем 33, после четвертого больше чем 65. Значит изначально не могло быть больше чем 5 точек. Аналогично доказывается, что изначально не могло быть меньше чем 5 точек. Значит ответ единственный.

Решение 2. Пусть изначально было x точек. Между каждыми поставили по 1, то есть поставили $x - 1$ точку. Всего стало $2x - 1$ точка. Далее поставили $2x - 2$ точки, стало $4x - 3$; потом поставили $4x - 4$ точки, стало $8x - 7$; в последний раз поставили $8x - 8$ точек, получилось $16x - 15$ точек. Значит $16x - 15 = 65$. Поэтому $x = 5$.

3. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама – с тремя кавалерами. Докажите, что на балу число дам равнялось числу кавалеров.

Решение. Если кавалеров было n, то они станцевали в совокупности $3n$ танцев. Но каждый танец был проведен с одной из дам. Поэтому дамы в совокупности станцевали тоже $3n$ танцев. А раз каждая дама станцевала ровно три танца, то всего было n дам.

4. Существуют ли четыре натуральных числа, попарные разности которых равны 2, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение 1. Наибольшая разность 6, то есть если самое маленькое число x, то самое большое $x + 6$, а все остальные числа лежат между ними. Заметим, что разность 5 также получается с помощью одного из чисел x или $x + 6$ (иначе пусть $a - b = 5$, тогда $(x + 6) - x = (x + 6 - a) + (a - b) + (b - x) \geq 1 + 5 + 1$). Возьмем, еще не использованное в разности 5, число (или самое маленькое, или самое большое) и то которое использовалось в разности 5. Получили разность 1. А такой разности нет.

Решение 2. В попарных разностях имеется два нечетных числа. Нечетные разности получаются из чисел разной четности. В изначальных числах может быть:

4 четных и 0 нечетных чисел. Тогда нечетных разностей нет.

3 четных и 1 нечетное. Тогда нечетных разностей 3.

2 четных и 2 нечетных. Тогда нечетных разностей 4.

1 четное и 3 нечетных. Тогда нечетных разностей 3.

0 четных и 4 нечетных. Тогда нечетных разностей нет.

Двух нечетных разностей нет, а значит таких четырех чисел не существует.

5. Из набора гирек 1г, 2г, ..., 101г удалили гирьку массой 7г. Можно ли остальные гирьки разложить на 2 чаши весов, по 50 гирек на каждую, так, чтобы весы были в равновесии?

Решение. Разобьем все гирьки, которые удастся, на пары гирь с суммарной массой 102. Это будут пары $1, 101$; $2, 100$ и т.д. В пары не попадут числа 95 (так как для него в паре должно быть число 7, которого нет) и 51 (так как оно в паре должно быть с 51, а у нас всего одна гирька с массой 51). Всего пар будет 49. Положим на весы по 24 пары гирек. Оставим пару $29, 73$. Остались 4 гирьки $29, 51, 73, 95$. На одну чашу весов положим гирьки $29, 95$, на другую – $51, 73$. Так как $29 + 95 = 51 + 73$, то весы будут находиться в равновесии.

6 класс. Решения.

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. Аналогично эту операцию проделали еще три раза. В результате, на прямой оказалось ровно 65 точек. Сколько точек было первоначально?

Решение 1. Пусть изначально на прямой было 5 точек. Тогда после первого добавления точек стало 9. После второго – 17, после третьего – 33, после четвертого – 65. То есть ответ 5 подходит. Покажем, что других ответов не было. Если есть другой ответ, то изначально точек было либо больше 5, либо меньше 5. Предположим, сначала, что их было больше. Тогда после второго добавления было больше чем 17, после третьего – больше чем 33, после четвертого больше чем 65. Значит изначально не могло быть больше чем 5 точек. Аналогично доказывается, что изначально не могло быть меньше чем 5 точек. Значит ответ единственный.

Решение 2. Пусть изначально было x точек. Между каждыми поставили по 1, то есть поставили $x-1$ точку. Всего стало $2x-1$ точка. Далее поставили $2x-2$ точки, стало $4x-3$; потом поставили $4x-4$ точки, стало $8x-7$; в последний раз поставили $8x-8$ точек, получилось $16x-15$ точек. Значит $16x-15=65$. Поэтому $x=5$.

2. Куб сложен из 27 одинаковых кубиков размерами $1\times1\times1$. Из него вынули все угловые кубики. Найдите площадь поверхности получившейся фигуры.

Решение. Заметим, что угловой кубик когда присутствовал в углу давал три квадрата 1×1 к площади поверхности. Когда его вытащили он освободил также три квадрата 1×1. Значит площадь поверхности получившийся фигуры равна площади поверхности исходной фигуры. Площадь поверхности исходной фигуры равна $3\cdot3\cdot6=54$.

3. Существуют ли четыре натуральных числа, попарные разности которых равны 2, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение 1. Наибольшая разность 6, то есть если самое маленькое число x, то самое большое $x+6$, а все остальные числа лежат между ними. Заметим, что разность 5 также получается с помощью одного из чисел x или $x+6$ (иначе пусть $a-b=5$, тогда $(x+6)-x=(x+6-a)+(a-b)+(b-x)\geq 1+5+1$). Возьмем, еще не использованное в разности 5, число (или самое маленькое, или самое большое) и то которое использовалось в разности 5. Получили разность 1. А такой разности нет.

Решение 2. В попарных разностях имеется два нечетных числа. Нечетные разности получаются из чисел разной четности. В изначальных числах может быть:

4 четных и 0 нечетных чисел. Тогда нечетных разностей нет.

3 четных и 1 нечетное. Тогда нечетных разностей 3.

2 четных и 2 нечетных. Тогда нечетных разностей 4.

1 четное и 3 нечетных. Тогда нечетных разностей 3.

0 четных и 4 нечетных. Тогда нечетных разностей нет.

Двух нечетных разностей нет, а значит таких четырех чисел не существует.

4. На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжет). Однажды все жители разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал одну из фраз: либо "Мой сосед по паре - рыцарь", либо "Мой сосед по паре - лжец". Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз было произнесено поровну?

Решение. В паре рыцарь-лжец были произнесены две фразы "Мой сосед по паре – лжец". В парах лжец-лжец и рыцарь-рыцарь были произнесены по две фразы "Мой сосед по паре рыцарь". Если количество фраз "Мой сосед по паре – рыцарь"будет равно количеству фраз "Мой сосед по паре – лжец", то пар рыцарь-лжец будет столько же сколько пар лжец-лжец и рыцарь-рыцарь в совокупности. Значит всего будет четное количество пар. А у нас их $1234/2=617$ – нечетное число. Значит не могло быть того чтобы фраз было одинаково.

5. Существуют ли два многоугольника, у которых совпадают все вершины, но не совпадает ни одна из сторон?

Решение. Да, существуют.

7 класс. Решения.

1. Куб сложен из 27 одинаковых кубиков размерами $1 \times 1 \times 1$. Из него вынули все угловые кубики. Найдите площадь получившейся фигуры.

Решение. Заметим, что при удалении углового кубика площадь поверхности не изменяется, т.к. добавляется и убирается по три квадратика 1×1. Поэтому площадь поверхности остается такой же, т.е. 54.

2. Существуют ли четыре натуральных числа, попарные разности которых равны: 2,2,3,4,5,6?

Решение 1. Наибольшая разность 6, то есть если самое маленькое число x, то самое большое $x+6$, а все остальные числа лежат между ними. Заметим, что разность 5 также получается с помощью одного из чисел x или $x+6$ (иначе пусть $a-b=5$, тогда $(x+6)-x=(x+6-a)+(a-b)+(b-x) \geq 1+5+1$). Возьмем, еще не использованное в разности 5, число (или самое маленькое, или самое большое) и то которое использовалось в разности 5. Получили разность 1. А такой разности нет.

Решение 2. В попарных разностях имеется два нечетных числа. В изначальных числах может быть:
4 четных и 0 нечетных чисел. Тогда нечетных разностей нет.
3 четных и 1 нечетное. Тогда нечетных разностей три.
2 четных и 2 нечетных. Тогда нечетных разностей 4.
1 четное и 3 нечетных. Тогда нечетных разностей 3.
0 четных и 4 нечетных. Тогда нечетных разностей нет.
Двух нечетных разностей нет, а значит таких четырех чисел не существует.

3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, что бы можно было попасть с любой отмеченной клетки на любую другую отмеченную двумя ходами коня.

Решение. Заметим, что за два хода конь не может изменить свое положение больше чем на 4 горизонтали(вертикали) поэтому все отмеченные клетки накрываются квадратом 5×5.

Заметим также, что конь не может попасть за два хода из одной отмеченной клетки в другую на рисунке:

1				
		1		
				1

Заметим что конь за один ход меняет цвет клетки на которой стоит, поэтому через два хода он окажется на клетке такого же цвета. Т.е. все отмеченные клетки одного цвета.

Квадрат 5×5 состоит из 13 клеток одного цвета и 12 клеток другого, поэтому рассмотрим два случая:

1		1		1
	1		1	
1		1		1
	1		1	
1		1		1

	2		2	
2		2		2
	2		2	
2		2		2
	2		2	

Пусть отмеченные клетки среди тринадцати клеток. Тогда среди клеток помеченными одной цифрой не может быть более одной отмеченной клетки.

1		5		4
	2		3	
6		1		5
	3		2	
4		6		1

Т.е. в этом случай не более 6 отмеченных клеток.

Второй случай, среди клеток помеченных одной цифрой не может быть более двух отмеченных. Т.е. не более восьми клеток может быть отмечено, из этого строится пример:

	1		3	
2		4		2
	3		1	
4		2		4
	1		3	

	1		1	
1				1
1				1
	1		1	

4. На плоскости лежит прямоугольник который можно накрыть кругом радиуса 1. Можно ли его будет накрыть этим же кругом после сгиба?

Решение. Пусть есть прямоугольник накрытый кругом, пусть прямоугольник согнули по какой то прямой. Согнем тогда по этой же прямой и круг.Тогда фигуру полученную при сгибе прямоугольника можно будет накрыть фигурой полученной при сгибе круга. Однако при сгибе круга у него только "убирается"меньшая часть.

5. Окружность разбита n красными и n синими точками на $2n$ равных дуг. Докажите, что суммарная длина хорд с красными концами равна суммарной длине хорд с синиими концами.

Решение. Пусть x – сумма растояний от одной отмеченной точки до всех остальных. Пусть y – суммарная длина всех красно-синих хорд. Тогда nx – сумма расстояний от красных вершин до всех остальных, в которой каждая красно-красная хорда была посчитана ровна два раза, а каждая красно-синяя ровно один раз, поэтому $nx - y$ есть удвоенная длина хорд с красными концами. Аналогично, $nx - y$ есть удвоенная длина хорд с синими концами, т.е. их длины равны.