5 класс.

1. Тимур задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Тимур.

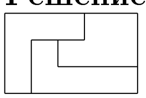
Решение: Раз Тимур получил число 2 разделив какое-то число на 7, то он разделил число 14. Перед этим у него получилось число 20 (так как только из него, вычитая 6, можно получить 14). Аналогично перед этим у него получилось 5, перед ним – 15, перед ним – 10. Значит изначально Тимур задумал число 10.

2. Фермер привез на базар огурцы. Когда он стал считать их десятками, то не хватило трех огурцов до полного числа десятков. Когда он стал считать огурцы дюжинами, то осталось 9 огурцов. Сколько было огурцов, если их было больше 300, но меньше 400.

Решение: Когда фермер считал огурцы десятками у него могло получится 307,317,327,337,347,357,367,377,387,397 так, как именно для этих чисел не хватает трех до полного числа десятков и при этом они больше 300 и меньше 400. Осталось проверить какие из этих чисел подходят для того чтобы когда их "считать дюжинами, то осталось 9 огурцов". Такое число единственное. Оно равно 357.

3. Вася составил из различных фигур, состоящих из 5 клеток прямоугольник. Какое наименьшее количество фигур Вася потратил? И как именно он сложил прямоугольник?

Решение: Из трех фигурок он мог сложить, например, вот так



Докажем, что из двух фигурок Вася не мог сложить прямоугольник. Если бы у него получилось сложить прямоугольник, то площадь этого прямоугольника была бы равна 10 клеткам. Значит этот прямоугольник был бы размерами 1×10 или 2×5. В первом случае получаются две равные фигуры (прямоугольники 1×5). Во втором случае как бы мы не делили на две фигуры по пять клеток у нас все равно получится две равные фигуры. Значит из двух фигур Вася не мог составить прямоугольник.

4. В квадрате 7×7 отмечено 8 клеток. Докажите, что внутри квадрата можно по клеточкам выделить квадрат 2×2 без отмеченных клеток.

Решение: Выделим в изначальном квадрате 7×7 квадрат 6×6 и разделим его на 9 квадратов 2×2. Если в каждом из этих маленьких квадратов будет отмечена клетка, то их будет 9. А у нас отметили всего 8 отмеченных клеток. Значит один из наших квадратов 2×2 без отмеченной клетки.

5. Сколькими различными способами можно разменять рубль, используя монеты по 50, 10 и 5 копеек?

Решение: Если используется одна монета в 50 копеек, то оставшиеся 50 копеек можно набрать 1 монетой в 50 копеек (первый способ); 0 монет в 10 копеек и остальную часть 5 копеечными монетами (2 способ);1 монетой в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечными монетами (3 способ); 2 монетами в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечными монетами (4 способ); 3 монетами в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечными монетами (5 способ); 4 монетами в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечные монеты (6 способ); 5 монетами в 10 копеек (7 способ). Если же не использовать монеты в 50 копеек, то 1 рубль можно набрать 0 монет в 10 копеек (1 способ); 1 монетой в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечными монетами (2 способ); 2 монетой в 10 копеек и остальную сумму 5 копеечными монетами (3 способ); и т.д. 10 монетами в 10 копеек (11 способ). Всего способов $7 + 11 = 18$.

6 класс.

1. Лошадь съедает воз сена за месяц, коза за 2 месяца, овца за три месяца. За какое время лошадь, коза и овца съедят такой же воз сена вместе?

Решение: Лошадь за 6 месяцев съедает 6 возов сена, коза 3 воза сена, овца – 2 воза сена. Вместе они за шасть месяцев съедят $6 + 3 + 2 = 11$ возов сена. Значит один воз сена они вместе съедят за $\frac{6}{11}$ месяца.

2. Занятие кружка художественного свиста проходят по вторникам и четвергам. Оказалось, что в некотором месяце состоится 10 занятий этого кружка. На какой день недели приходится первое число этого месяца?

Решение: В месяце 4 полных недели и еще "маленький хвостик". В одной полной недели ровно 2 занятия художественного свиста. Поэтому на "хвостик"приходится 2 кружка. Значит в этот хвостик входит и вторник, и четверг. Значит этот "хвостик"состоит как минимум из 3 дней (вторник, среда, четверг). Но это максимальная длина "хвостика"(если в месяце 30 дней, то длина "хвостика"2 дня, если 31 день, то длина "хвостика"3 дня.). Значит месяц закончился в четверг. Не трудно проверить, что тогда первый день этого месяца приходится на вторник.

3. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число 1, 2 или 3. Могут ли суммы чисел во всех строках, столбцах и главных диагоналях быть различными?

Решение: Посмотрим чему может равняться суммы, о которых идет речь в задачах. Минимальное возможное значение это 3 $(1 + 1 + 1)$. Максимальное возможное значение – 9 $(3 + 3 + 3)$. Значит эти суммы могли быть равны $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. То есть эти суммы могут принимать только 7 различных значений. А сумм изначально 8. Значит какие то две суммы будут принимать одинаковые значения.

4. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

Решение: Покажем, что если воткнуть булавку в середину верхнего листа, то она проткнет каждый лист. Возьмем произвольный лист. Если он не проткнут булавкой, то центр верхнего прямоугольника лежит не в нем, а значит верхний прямоугольник покрывает менее половины взятого нами прямоугольника. Противоречие. Значит булавку надо втыкать в середину верхнего листа.

5. Сколькими различными способами можно разменять рубль, используя монеты по 50, 10, 5 и 1 копейки?

Решение: Если не использовать монеты по 1 копейке, то можно разменять 1 рубль 18 способами (см. решение задачи 5 в 5 классе). Посчитаем сколько способов, когда монеты по 1 копейке присутствуют. Понятно, что их (монет по 1 копейке) количество должно быть кратно 5. Если их 5, то одна пятерка точно есть. А значит в этом случае надо посчитать сколькими способами можно разменять 90 копеек монетами в 50, 10 и 5. Аналогично с тем как считались способы для задачи 5 из 5 класса получаем, что количество способов равно $5 + 10 = 15$. Если монет по 1 копейки 10, то аналогично, получается 15 способов. Аналогично считаем если копеек 15 или 20, то $4 + 9 = 13$ для каждого случая (для 15 монет по одной копейке 13 способов и 13 способов для 20 монет по одной копейке). Если монет по 1 копейке 25, то способов $3 + 8 = 11$. Если 30, то также 11 способов. Если 35 монет по 1 копейке, то способов $2 + 7 = 9$. Если 40, то также 9 способов. Если 45 монет по 1 копейке, то способов 7. Если 50, то также 7. Если 55 или 60 монет по 1 копейке, то способов по 5. Если 65 или 70 монет по 1 копейке, то способов 4. Если 75 или 80, то способов 3. Если 85 или 90 то способов 2. Если 95 или 100, то способов 1. Итого получаем $18 + 15 + 15 + 13 + 13 + 11 + 11 + 9 + 9 + 7 + 7 + 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 158$.

7 класс.

1. Что быстрее - проехать весь путь на велосипеде или две трети пути проехать на мотоцикле, который движется в три раза быстрее, чем велосипед, а оставшуюся часть пройти пешком, что втрое медленнее, чем ехать на велосипеде?

Решение: Треть пути пройти пешком занимает столько же времени сколько и весь путь проехать на велосипеде (так как на велосипеде в три раза быстрее). Значит проехать на велосипеде весь путь быстрее.

2. На столе лежат 9 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 9. Двое по очереди откладывают в сторону по одной карточке. Проигрывает тот, после хода которого сумма чисел на отложенных карточках станет больше 25. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

Решение: Первый игрок выигрывает. Он первым своим ходом берет карточку с цифрой 5. Разбивает все карточки на пары: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. Как только второй игрок берет одно число из пары, первый берет второе число из пары. Тогда после трех ходов первого игрока сумма чисел на выбранных карточках будет равна 25. А значит своим следующим ходом второй превысит 25. Значит он проиграет.

3. В Море Дождей живут осьминожки, у каждой - один или два друга. Когда взошло Солнце, все те осьминожки, у кого было двое друзей, посинели, а все те, у кого был один друг - покраснели. Оказалось, что любые два друга - разноцветные. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, и одновременно с этим 12 красных осьминожек перекрасились в синий цвет, после чего любые два друга стали одного цвета. Сколько осьминожек в Море Дождей?

Решение: После восхода Солнца все осьминожки у которых было по одному другу стали красными, а у кого по два друга стали синими. Возьмем какую-нибудь красную осьминожку. У нее есть синий друг (потому что все друзья разноцветные). У этого синего друга есть еще один друг - красный. А у этого красного больше нет друзей кроме того, которого мы уже рассмотрели. Значит все осьминожки разбились на тройки: красная-синяя-красная. В десяти из этих троек синие перекрасились в красный цвет. В этих 10 тройках красные не перекрашивались (иначе в этих тройках были бы разноцветные друзья). 12 красных осьминожек перекрасились в синий в 6 тройках. Значит всего было 16 троек. Значит всего осьминожек было 48.

4. На каждую клетку шахматной доски положили по несколько монет так, что суммы на каждых двух клетках, имеющих общую сторону, отличаются на копейку. Известно также, что на одной из клеток лежит 3 коп., а на другой - 17 коп. Какую сумму образуют монеты, лежащие на обеих диагоналях?

Решение: Посмотрим на какой-нибудь путь по клеткам от 3 до 17. В этом пути не более 14 клеток (не считая 3 и 17). При переходе на следующую клетку на этом пути число копеек на ней может увеличится максимум на 1. Значит на всем пути она увеличилась максимум на 14. Но на этом пути она увеличилась ровно на 14. Значит на всем этом пути (от 3 до 17) при переходе на следующую клетку число копеек на ней становилось на 1 больше, чем в предыдущей клетке. А также числа 3 и 17 стоят в противоположных углах. В связи с тем, что мы брали произвольный путь, то однозначно восстанавливается числа на всей таблице. Не трудно видеть, что сумма на диагоналях будет равна 160.

5. На катетах и прямоугольного треугольника вне него построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

Решение: Опустим перпендикуляр O из точки C на гипотенузу AB. Треугольник EMC равен треугольнику AOC (они прямоугольные и $EA = AC$, $\angle MEA = \angle OAC$ (эти углы равны из-за того, что $\angle MEA + \angle EAM = 90 = \angle OAC + \angle EAM$)). Из равенства этих треугольников следует, что $EM = AO$. Аналогично треугольник NBF равен треугольнику OCB. А значит $FN = BO$. Значит $EM + FN = AO + OB = AB$.