Старшая группа.

1. 16 клеток белого квадрата 8×8 закрашены в черный цвет, причем в каждом столбце и в каждой строке ровно две черные клетки. Докажите, что перекрашиваниями строк и столбцов нельзя уменьшить число черных клеток.

2*. Существуют ли шесть шестизначных чисел, состоящих из цифр от 1 до 6 без повторений, таких, что любое трехзначное число, в записи которого участвуют лишь цифры от 1 до 6 без повторений, можно получить из одного из этих чисел вычеркиванием трех цифр?

3. D и E – точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами BC и AC. На биссектрису угла BAC опустили перпендикуляр BK. Докажите, что точки D, E и K лежат на одной прямой.

4. (A_n) – бесконечная последовательность натуральных чисеп такая, что $A_{n+k} - A_k$ делится на A_n при любых n и k. Обозначим через B_n произведение $A_1 A_2 \ldots A_n$. Докажите, что B_{n+k} делится на $B_n B_k$ при любых n и k.

5. Докажите, что множество всех натуральных чисел, больших единицы, нельзя разбить на два непустых множества так, что если числа a и b лежат в одном множестве, то и число $ab - 1$ лежит в том же множестве.

6. Последовательность целых чисел x_0, x_1, x_2, $\ldots$ такова, что $x_0 = 0$, а $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для каждого натурального n. Каково наименьшее возможное значение выражения $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{1975}|$?

7. В стране некоторые города соединены дорогами. Длина каждой дороги не более 500 км. Известно, что из любого города можно проехать в любой другой, проехав не более 500 км. Одну из дорог закрыли, причем по-прежнему из каждого города можно проехать в каждый. Докажите, что теперь это можно сделать, проехав не более 1500 км.

8. На шахматной доске отмечены центры всех 64 клеток. Можно ли тринадцатью прямыми разрезами разбить доску на части так, чтобы в каждой из них было не более одного центра клетки?

9. Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведенные через точки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

10. Город имеет вид клетчатого квадрата 100×100 со стороной клетки, равной 500 м. По каждой стороне каждой клетки можно двигаться только в одном направлении. Известно, что по городу можно проехать не более 1 км, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется не менее 1300 перекрестков, с которых нельзя выехать, не нарушив правил движения. (Углы города также являются перекрестками.)