# Младшая группа.

1. Квадрат разбили на $9801 = 99^2$ равных квадратиков и отметили их центры во всех квадратиках, кроме одного углового. Отмеченные точки разбили на пары, и точки каждой лары соединили вектором. Докажите, что сумма полученных векторов не равна нуль-вектору.

2. Двое играют в такую игру. Первый игрок пишет какую-либо цифру, второй игрок приписывает к ней слева или справа еще одну цифру, первый игрок приписывает к образовавшемуся числу еще одну цифру и т. д. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы ни одно число, получающееся после хода второго игрока, не было квадратом целого числа.

3. На координатной плоскости даны четыре точки с целыми координатами. Разрешается заменять любую из этих точек на точку, симметричную ей относительно любой другой из этих точек. Можно ли за несколько таких операций перейти от точек с координатами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) к точкам с координатами (0; 0), (1; 1), (3; 0), (2; -1)?

4. Даны числа: единица и девять нулей. Разрешается выбрать два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций?

5. Фишка может находиться в одной из 169 точек $(x; y)$, где $x$ и $y$ – целые числа, $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 12$. Фишка может пойти из точки $(x_1, y_1)$ в точку $(x_2, y_2)$, только если каждое из чисел $|x_1 - x_2|, |x_1 - y_2|, |y_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ не меньше двух и не больше девяти. Докажите, что фишка не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно по разу.

6. На стороне $AB$ квадрата $ABCD$ выбрана точка $K$, на стороне $CD$ – точка $H$, и на отрезке $KH$ – точка $M$. Докажите, что вторая (отличная от $M$) точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $AKM$ и $MHC$, лежит на диагонали $AC$.

7. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможных комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

8. Дана стопка из $2n + 1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции:

а) сверху снимается часть карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка;

б) верхние $n$ карточек с сохранением порядка вкладываются в $n$ промежутков между нижними $n + 1$ карточками.

Докажите, что при помощи указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n + 1)$ различных расположений карточек.

9. $N$ городов соединены друг с другом $2N - 1$ дорогами с односторонним движением. При этом из любого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил. Докажите, что есть дорога, после закрытия которой это свойство сохранится.

10. В трапеции $ABCD$ (с основаниями $BC$ и $AD$) на сторонах $AB$ и $CD$ взяты точки $K$ и $L$. Докажите, что если углы $BAL$ и $CDK$ равны, то равны и углы $BLA$ и $CKD$.