7-8 класс

1. Числа a, b, c и d таковы, что для всякого числа , для которого $cx+d\neq 0$ и $c_1x+d_1\neq 0$, выполнено неравенство $(ax+b)/(cx+d) > (a_1x+b_1)/(c_1x+d_1)$. Докажите, что величина $(ax+b)/(cx+d)-(a_1x+b_1)/(c_1x+d_1)$ не зависит от числа x (для тех значений x, для которых оба знаменателя отличны от нуля).

2. На прямой отмечено несколько отрезков (может быть, пересекающихся). Левую половину каждого отрезка покрасили в красный цвет. Оказалось, что закрашенные точки образовали сплошной красный отрезок. Если бы вместо этого правую половину каждого из исходных отрезков покрасили в синий цвет, то синие точки образовали бы сплошной синий отрезок, длина которого была бы на 20 см короче длины красного. Докажите, что среди исходных отмеченных отрезков найдутся два отрезка, длины которых отличаются не менее, чем на 40 см.

3. В вершинах правильного 1998-угольника записаны числа. Известно, что сумма трех чисел в вершинах любого равнобедренного треугольника – целое число. Верно ли, что сумма трех чисел в вершинах любого треугольника – тоже целое число?

4. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 8×8. Если перед ходом игрока есть незакрашенные клетки, имеющие не менее двух закрашенных соседей (по стороне), то игрок своим ходом закрашивает их все. Если таких клеток нет, то он закрашивает одну любую незакрашенную клетку. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Имеются сто натуральных чисел. Докажите, что для некоторого натурального числа $k\leq 100$ из них всегда можно выбрать k чисел так, что две последние цифры их суммы образуют число k (если сумма оканчивается двумя нулями, это соответствует ста слагаемым).

6. a и m – натуральные числа, x – целое число такое, что a^2x-a делится на m. Докажите, что для некоторого целого y оба числа a^2y-a и ay^2-y делятся на m.

7. На острове Новая Вавилония используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.

8. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

9. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка D таким образом, что $BD=BA$. Точка M – середина стороны AC. Биссектриса угла ABC пересекает прямую DM в точке P. Докажите, что $\angle BAP=\angle ACB$.

10. На сторонах AB, BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q и R соответственно такие, что $PQ\parallel AC$ и $QR\parallel BD$. Точка M – середина отрезка PR. Докажите, что прямая MQ проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $BC\parallel AD$.

9-10 класс

1. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что его можно полностью покрыть четырьмя такими же треугольниками. (В данной задаче треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью.)

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

3. На книжной полке в каком-то порядке стоят книги 20-томного собрания сочинений. Библиотекарь хочет расставить эти тома в монотонном порядке - с 1-го по 20-й слева направо. За один прием библиотекарь меняет местами любой том, стоящий не на своем месте, с томом, занимающим его место. Докажите, что число таких операций, нужное для упорядочения томов, не зависит от последовательности действий библиотекаря.

4. Докажите, что существует такой набор из 100 попарно различных натуральных чисел, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел в одной из групп делится на сумму чисел в другой группе.

5. Дано 25-значное число без девяток в десятичной записи. Докажите, что можно увеличить на 1 две его одинаковые цифры так, чтобы полученное число не делилось на 7.

6. У Гарри есть мышонок и много-много лягушат. Гарри может превращать лягушат в мышат или наоборот по следующему правилу: если мышат и лягушат не поровну, то количество тех животных, которых было меньше половины, удваивается. После того как Гарри сумел проделать эту операцию 17 раз подряд, мышат впервые оказалось ровно в два раза больше, чем лягушат. Сколько животных было у Гарри?

7. a, b, c – положительные числа. Федя нашел сумму положительных корней уравнений $x^2 = ax + b$, $x^2 = bx + c$ и $x^2 = cx + a$, а Юра – сумму положительных корней уравнений $x^2 = ax + a$, $x^2 = bx + b$ и $x^2 = cx + c$. Эти суммы оказались различны. У кого из мальчиков сумма больше?

8. На шахматной доске 10×100 стоят два слона: белый в левом нижнем углу и черный в правом верхнем. Два игрока по очереди делают ходы слонами (первый белым, а второй черным). Игрок, поставивший своего слона под бой другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

9. Докажите, что если $0 < a, b < 1$, то $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$.

10. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$ на стороне AB выбрана точка D, и вокруг треугольников ADC и BDC описаны окружности S_1 и S_2 соответственно. Касательная, проведённая к S_1 в точке D, пересекает второй раз S_2 в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

11 класс

1. Последовательность вещественных чисел задана следующим образом: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $x_n < \pi$.

2. В плоскостях граней ABC и ABD правильного тетраэдра $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно. Докажите, что из отрезков CQ, PQ, PD можно составить треугольник.

3. Функция f определена на множестве рациональных чисел и все ее значения рациональны. Известно, что при любых $x, y \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $\left|f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq |x-y|^3$. Докажите, что $f(x) = ax + b$, причем числа a и b рациональны.

4. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной в обе стороны клеточной полосе ширины 1. Первый каждым своим ходом ставит два крестика, второй – один нолик. Игра заканчивается после того, как оба игрока сделали по 2^{45} ходов. Первый стремится поставить 100 крестиков в ряд, второй хочет ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{a+2b+c} + \frac{c^2}{a+b+2c} \geq \frac{a+b+c}{4}$.

6. На какое наименьшее число частей можно разбить все пары элементов данного n-элементного множества так, чтобы любые две пары из одной части имели общий элемент?

7. Пусть $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$, где n – натуральное число. Докажите, что для любых натуральных a и b число $b^{2n}\binom{a/b}{n}$ – целое.

8. На клетчатой доске размером 1000×1000 стоят красные, синие и зеленые фишки (в каждой клетке — не больше одной фишки). Рядом (в соседних по стороне клетках) с любой красной фишкой стоят 2 синие, а рядом с любой синей — 3 зеленые. Докажите, что есть зеленая фишка, рядом с которой нет красных.

9. A_1, B_1 и C_1 — проекции точки P, лежащей внутри остроугольного треугольника ABC, на стороны BC, CA и AB соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке K. Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ вторично пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что $KP \perp BL$.

10. Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили произведение 1. Найдите эти корни.