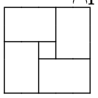
Городская олимпиада по математике. 5 класс.

(не забудьте обосновывать свои решения и ответы. Без обоснования они ценятся на много меньше!)

1. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части.

Решение.  .

2. Встретились три охотника и сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй одну, а у третьего крупы не было. Но зато он дал товарищам 5 патронов в качестве платы за кашу. Все ели поровну. Как следует разделить патроны между первым и вторым охотниками?

Решение. Заметим, что всего охотники съели 3 кружки крупы. о есть каждый съел по одной. Значит Второй охотник съел свою крупу, а третий ел крупу только первого охотника. Поэтому все свои патроны он должен отдать первому охотнику.

3. В соревнованиях по стрельбе участвовало 30 человек. Первый стрелок выбил 80 очков, второй — 60 очков, третий выбил среднее арифметическое чисел очков первых двух. И вообще, каждый следующий выбивал среднее арифметическое чисел очков, выбитых всеми предыдущими стрелками. Сколько очков выбил последний стрелок?

Решение. Тритий стрелок выбил $80 + 60/2 = 70$ очков. Четвертый стрелок выбил $80 + 60 + 70/3 = 70$ очков и т.д. Соответственно 30 стрелок выбил $80 + 60 + 70 + \ldots 70/30 = 70$ (всего в этой сумме 30 слагаемых 28 из которых равны по 70, одно 80, одно 60. Потому поделив н)а 30 мы и получим 70

4. В арифметическом ребусе ДУБ+ДУБ+...+ДУБ=ЛЕС требуется разные буквы заменить разными цифрами, одинаковые - одинаковыми. Какое наибольшее число "дубов"может быть в "лесу"?

Решение. Если дубов будет 10, то сумма 10 трехзначных чисел будет больше 1000. А значит не как не сможет равняться "лес". Покажем что пример на 9 есть. Д=1, У=0, Б=3, Л=9, Е=2, С=7.

5. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

Решение. Пусть на первом курсе студен сдал x экзаменов. Тогда на последнем $3x$. Если на пятом курсе студент сдал 12 экзаменов, то всего он сдал как минимум $12 + 4 + 5 + 6 + 7 = 34$ экзамена, что противоречит условию. Если на пятом курсе студен сдал 6 экзаменов, то всего он сдал максимум $6+5+4+3+2 = 20$ экзаменов, что также противоречит условию. Значит студен на пятом курсе сдал 9 экзаменов. Соответственно на первом 3. В суме на втором, третьем и четвертом $31 - 3 - 9 = 19$ экзаменов. Если на четвертом курсе студен сдал меньше восьми экзаменов, то максимум за второй, третий и четвертый курсы он мог сдать $7 + 6 + 5 = 18$ экзаменов, что противоречит тому, что он сдал 19. Значит на четвертом курсе студен сдал 98 экзаменов.

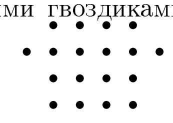
Городская олимпиада по математике. 6 класс.

(не забудьте обосновывать свои решения и ответы. Без обоснования они ценятся на много меньше!)

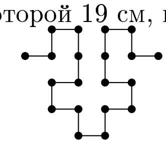
1. Перед тем, как Мишель Платини отдал Дику Адвокату кубок УЕФА, он вынес три коробочки. На красной было написано: "Здесь - кубок УЕФА", на синей - "Зеленая коробочка пуста", на зеленой - "Здесь - записка: "кубок УЕФА получит Рейнджерс". Платини прочел надписи и сказал: "Действительно, в одной коробочке лежит Кубок УЕФА, в другой записка, а третья пуста, но все надписи неверны". Где же лежит Кубок УЕФА?

Решение. Кубок УЕФА не может находиться в красной коробочки, так как там написано неправда. В зеленой не может находиться записка (так как на ней это написано), но и пуста она не может быть, так как на синей коробки написана неправда. Значит в зеленой коробке Кубок УЕФА.

2. В стене вбиты гвозди так, как показано на рисунке (расстояния между соседними гвоздиками 1 см).



Протяните веревку, длина которой 19 см, проходящую по всем гвоздикам.



Решение.

3. В арифметическом ребусе ДУБ+ДУБ+...+ДУБ=РОЩА требуется разные буквы заменить разными цифрами, одинаковые - одинаковыми. Какое наибольшее число "дубов"может быть в "роще"?

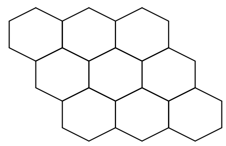
Решение. наибольшее значение "роща"может равняться 9876. Наименьшее значение "дуб"102. Значит дубов в роще не больше $[9876/102] = 96$. Покажем что 96 дубов быть не может. Действительно, $96 \cdot 102 = 9792$, $96 \cdot 103 = 9888$, $96 \cdot 104 = 9984$, $96 \cdot 105 = 10080$. В

Покажем, что 95 дубов может быть. $95 \cdot 103 = 9785$.

4. В поединке любых двух их девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Разбейте борцов по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе "каждый с каждым"по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья над первой.

Решение. Назовем борцов 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Борец с большим номером побеждает борца с меньшим. В первую группу распределим бойцов с номерами $1, 5, 9$, во вторую – $3, 4, 7$, в третью – $2, 6, 8$. Это и будет искомое разбиение.

5. Некоторые шестиугольные клетки на рисунке покрасили в черный цвет, а остальные – в красный. Докажите, что найдутся два отрезка одного цвета, расположенные на противоположных сторонах этой фигуры, соединенные дорожкой из шестиугольников того же цвета.



Решение. Назовем все шестиугольнике изображенные на рисунке. Пусть верхний ряд шестиугольников R, S, M; следующий – K, O, N; последний – L, R, T. Также у самого верхнего-левого шестиугольника самую левая-верхняя вершина будем называть A, а у самого нижнего-правого самую правую-нижнюю будем называть B.

Картинка симметрична относительно оси AB (с заме- ной красного цвета на черный и наоборот), смотрите рис. Поэтому можно считать центральную клетку красной. Будем предполагать, что одноцветных дорожек, описанных в условии задачи, нет, и приведем это предположение к противоречию. Если из клеток K, L хотя бы одна красная, то ни одна из клеток M, N не может быть красной (иначе получим красную дорожку). Клетки M, N – черные, тогда R, T – красные (иначе получим черную дорожку MNR или MNT). Но тогда получим красную дорожку LRT (если L – красная) или KORT (если K – красная). Противоречие. Пусть обе клетки K, L черные. Тогда клетка P должна быть красной, иначе получим черную дорожку PKL. Аналогично, клетка S – красная. Тогда M – обязательно черная. Клетка N также черная (иначе PSON – красная дорожка). Если клетка N черная, то обе клетки R, T красные, иначе получим черную дорожку. Но тогда получаем красную дорожку с началом в клетке S. Противоречие. Итак, непременно есть дорожка из плиток одного цвета, соединяющая два отрезка того же цвета на противоположных сторонах фигуры.

Городская олимпиада по математике. 7 класс.

(не забудьте обосновывать свои решения и ответы. Без обоснования они ценятся на много меньше!)

1. В хоккейном матче Россия – Канада вратарь сборной России Евгений Набоков пропустил каждый третий удар, а вратарь канадцев Кэм Уорд – каждый седьмой. Всего обе команды нанесли 17 ударов по воротам. С каким счетом закончился матч?

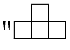
Решение. По воротам сборной России было нанесено количество ударов, которое кратно 3, а по воротам сборной Канады – кратное 7. Если ударов по воротам канадцев было 7, то по воротам сборной России было нанесено $17 - 7 = 10$ ударов, что не возможно. Если ударов по воротам канадцев было 0, то по воротам сборной России было нанесено 17 ударов, что не возможно. Значит ударов было 14. А по воротам сборной России было 3. Итого матч закончился со счетом $2 : 1$ в пользу сборной России.

2. Все натуральные числа раскрасили в два цвета так, что разность любых двух чисел, покрашеных в один цвет, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие раскраски.

Решение. Заметим, что числа a и $101 + a$ раскрашены в разные цвета. Также в разные цвета раскрашены числа a и $103 + a$. Значит числа $a + 101$ и $a + 103$ раскрашены в один цвет при любом значении a. Значит все четные числа раскрашены в один цвет, а все нечетные в другой. Таким образом существует ровно две такие раскраски.

3. В треугольнике ABC угол A - наименьший. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка X, а на продолжении стороны AB за точку B - точка Y. Докажите, что $AX + AY \geq BX + CY$.

Решение. $AX + AY = AB + BY + AC + CX$. Так как угол A наименьший, то сторона BC также наименьшая. Значит можно написать следующие неравенства $AB + BY + AC + CX \geq BC + BY + BC + CX \geq BX + CY$. Последнее неравенство получается из сложения двух неравенств треугольника: $BC + BY \geq CY$ и $BC + CX \geq BX$.

4. В ньюшахматах доска точно такая же как и в обычных, но расмерами 10×10 клеток. Наметьте разрезы на такой доске, с помощью которых можно получить как можно больше фигур в виде буквы "T" .

Решение. Ясно, что можно разместить 24 буквы "T". Покажем, что 25 разместить нельзя. Каждая буква "T"занимает либо 1, либо 3 черные клетки. Значит 25 букв "T"занимают нечетное число черных клеток. А их всего 50. Значит все клетки не получится замостить.

5. Даны четыре попарно различных положительных числа a, b, c и d. Каждую минуту эти числа одновременно заменяются на $a + b + c - 2d$, $a + c + d - 2b$, $a + b + d - 2c$, и $b + c + d - 2a$. Докажите, что через несколько минут на доске появится отрицательное число?

Решение. Заметим, что сумма всех чисел не изменяется после каждой операции (она всегда равна $a+b+c+d$). Заметим также, что разность первого числа и второго всегда увеличивается на $a+b+c-2d-(a+c+d-2b) = 3b-3d$, то есть с каждым разом изначальное число умножается на 3. Значит в какой то момент оно станет больше суммы всех чисел, а это значит, что вычитаемое будет отрицательным.